Generating function of the Gel'fand basis for the representation of unitary groups

1983 J. Phys. A: Math. Gen. 16 1835

(http://iopscience.iop.org/0305-4470/16/9/009)

J. Phys. A: Math. Gen. 16 (1983) 1835–1844. Printed in Great Britain

Fonction génératrice de la base de Gel'fand de la représentation des groupes unitaires

M Hage Hassan[†]

Institut de Physique Nucléaire (et IN2P3), Université Claude Bernard Lyon I, 43, Bd du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France.

Reçu le 23 juillet 1982

Resumé. Nous construisons la fonction génératrice de la base de Gel'fand des groupes unitaires ainsi que celle des éléments de la matrice de la représentation. A partir de ces fonctions, nous obtenons par des calculs simples, les vecteurs de la base et les éléments de la matrice de la représentation de la base de Gel'fand. Les fonctions génératrices sont obtenues par deux méthodes différentes: la première, tire profit d'une propriété des fonctions génératrices que nous mettons en évidence dans ce travail, et la seconde utilise des calculs de récurrence sur la chaîne $\mathrm{GL}(1, c) \subset \mathrm{GL}(2, c) \subset \ldots \subset \mathrm{GL}(N, c)$.

Abstract. We construct the generating function of the Gel'fand basis for unitary groups as well as representation matrix elements. From these functions, we obtain via simple calculations both the basis vectors and the representation matrix elements in the Gel'fand basis. The generating functions are obtained by two different methods: the first takes advantage of a property of the generating function shown in this paper and the second one uses recurrence relations for the chain $\mathrm{GL}(1, c) \subset \mathrm{GL}(2, c) \subset \ldots \subset \mathrm{GL}(N, c)$.

1. Introduction

L'étude des groupes unitaires est d'une importance considérable en physique. La connaissance explicite des états de Gel'fand ou des éléments de la matrice de la représentation de $\mathrm{U}(n)$ est fondamentale en physique atomique, en physique nucléaire et en physique des particules élémentaires.

Plusieurs procédés ont été exposés pour la détermination des états de Gel'fand: l'approche infinitésimale (Nagel et Moshinsky 1965), la méthode inductive des opérateurs tensoriels irréductibles (Louck et Biedenharn 1973) ou bien encore certains calculs de récurrence sur la chaîne $\mathrm{GL}(1, c) \subset \mathrm{GL}(2, c) \subset \ldots \subset \mathrm{GL}(n, c)$ (Flores et Niederle 1970, Henrich 1975). Mais toutes ces approches présentent la même difficulté, les calculs devenant inextricables pour $n \geqslant 4$.

Cette difficulté nous a conduit à procéder autrement. L'étude des fonctions génératrices des polynômes orthogonaux (Vilenkin 1969), des groupes de rotation (Schwinger 1965) et de la base de l'oscillateur harmonique (Hage Hassan 1980), montre que toutes ces fonctions ont une propriété commune: dans la construction de la fonction génératrice, à chaque état est associé un produit de paramètres dont les puissance sont égales aux puissances des opérateurs d'échelle appliqués aux états

[†] Adresse permanente: Université Libanaise, Faculté des Sciences, Section I, Hadeth, Beyrouth, Liban.

extrêmes pour obtenir chaque état. C'est cette propriété qui a permis de construire les fonctions génératrices de la base de Gel'fand et des éléments de la matrice de la représentation du groupe U(n). Et par un calcul de récurrence, nous construisons ces fonctions génératrices et nous établissons que ce sont les fonctions génératrices de la base orthonomée de la représentation de U(n).

Nous consacrons les préliminaires à un résumé des résultats dont nous avons besoin dans ce travail. Dans § 2 nous construisons la fonction génératrice de la base de Gel'fand et des éléments de la matrice de la représentation de U(n). La partie 3 est consacrée à démontrer que les fonctions que nous avons construites sont les fonctions génératrices de la base orthonormée. L'appendice est réservé à l'exposé de la propriété commune des fonctions génératrices dont la mise en évidence a été le point de départ de ce travail.

2. Base de Gel'fand et éléments de la matrice de représentation de U(n)

2.1. La base de Gel'fand

Dans §§ 2.1 et 2.2 nous présentons les propriétés essentielles de la base (ou base de Gel'fand) et des éléments de la matrice de la représentation des groupes unitaires.

Les sous-espaces irréductibles $[h_{\mu n}]$ ($\mu = 1, \ldots, n$) de U(n) sont décrits par les vecteurs de base, ou base de Gel'fand (Louck 1970):

$$|h_{\mu\nu}\rangle = \left|\begin{matrix}[h_n] \\ (h)_n\end{matrix}\right\rangle = \left|\begin{matrix} h_{1n}h_{2n}\ldots h_{nn} \\ h_{1n-1}\ldots h_{n-1\,n-1} \\ h_{12}h_{22} \\ h_{11}\end{matrix}\right\rangle \tag{1}$$

où $1 \leqslant \mu \leqslant \nu \leqslant n$, ou encore

$$|h_{\mu\nu}\rangle = \left|\begin{matrix}[h]_n \\ [h]_{n-1} \\ (h)_{n-1}\end{matrix}\right\rangle. \tag{2}$$

$h_{\mu\nu}$ sont des entiers positifs qui satisfont les conditions suivantes:

$$h_{i\,j+1} \geqslant h_{ij} \geqslant h_{i+1\,j+1}.$$

Nous associons à chaque état $|h_{\mu\nu}\rangle$ un vecteur ou vecteur de poids qui a pour composantes $(\omega_{1n}, \omega_{2n}, \ldots, \omega_{nn})$ avec

$$\omega_{in} = \sum_{j=1}^{i} h_{ji} - \sum_{j=1}^{i-1} h_{j\,i-1}. \tag{3}$$

Nous notons respectivement $\left|\begin{matrix}[h]_n \\ (\max)_n\end{matrix}\right\rangle$ et $\left|\begin{matrix}[h]_n \\ (\min)_n\end{matrix}\right\rangle$, les états qui ont les poids maximal et minimal. Le vecteur $\left|\begin{matrix}[h]_n \\ [h]_{n-1} \\ (\max)_{n-1}\end{matrix}\right\rangle$ est le vecteur semi-maximal. Par la suite, nous écrirons $[h]$ au lieu de $[h]_n$ et (h) au lieu de $(h)_n$ pour éviter d'alourdir la présentation, étant entendu que nous rétablirons l'emploi des indices quand cela s'avèrera nécessaire.

La dimension des sous-espaces irréductibles $[h_{\mu n}]$ est donnée par la formule de Weyl:

$$d_{[h_{\mu n}]} = \left[\prod_{i<j} (P_{in} - P_{jh})\right] \Big/ 1!\,2!\ldots(n-1)! \tag{4}$$

avec $P_{in} = h_{in} + n - i$.

Les représentations fondamentales du groupe $\mathrm{U}(n)$ sont les sous-espaces irréductibles:

$$[1, 0, \ldots, 0], [1, 1, 0, \ldots, 0], \ldots, [1, 1, \ldots, 1].$$

Les vecteurs de base de toutes ces représentations sont désignés par $|x_i\rangle$ avec $i = 1, \ldots, 2^n - 1$. Nous notons $h^i_{\mu\nu}$, les indices des vecteurs $|x_i\rangle$. Nous pouvons considérer formellement les vecteurs $|h_{\mu\nu}\rangle$ de la base $[h_{\mu n}]$ comme des polynômes homogènes en $|x_i\rangle$ avec $|h_{\mu\nu}\rangle = NP_{(h_{\mu\nu})}(|x\rangle)$ où N est une constante de normalisation (Gazeau *et al* 1978).

2.2. *Eléments de la matrice de la représentation de $U(n)$ et 'polynômes à bosons'*

2.2.1. Eléments de la matrice de la représentation de $U(n)$. A chaque transformation unitaire $U(n) = (u_{ij})$ de C_n on associe un opérateur T_{U_n} défini par:

$$T_{U_n}\left|\begin{matrix}[h]\\(h)\end{matrix}\right\rangle = \sum_{(m)} \left\langle\begin{matrix}[h]\\(m)\end{matrix}\right| T_{U_n} \left|\begin{matrix}[h]\\(h)\end{matrix}\right\rangle \left|\begin{matrix}[h]\\(m)\end{matrix}\right\rangle. \tag{5}$$

Les éléments $\left\langle\begin{matrix}[h]\\(m)\end{matrix}\right| T_{U_n} \left|\begin{matrix}[h]\\(h)\end{matrix}\right\rangle = D^{[h]}_{(m),(h)}(U_n)$ sont les éléments de la matrice de la représentation. Ces éléments s'expriment à l'aide des variables (Louck 1970):

$$M_{ij}(U_n) = \langle x_i | T_{U_n} | x_j \rangle. \tag{6}$$

Nous déduisons de (6) que:

$$x_i(U_n) = \left\langle\begin{matrix}[h^i]\\(\max)\end{matrix}\right| T_{U_n} \left|\begin{matrix}[h^i]\\(h)\end{matrix}\right\rangle. \tag{7}$$

Le calcul de $x_i(U_n)$ s'effectue à l'aide de la paramétrisation de $U(n)$ que nous avons proposée (Hage Hassan 1979). Le calcul d'une partie de ces coefficients présente un grand intérêt pratique pour la construction des invariants de Weyl (Sharp et Lee 1971) et fera l'objet d'un travail ultérieur.

2.2.2. 'Polynômes à bosons'. Nous notons X, l'ensemble $X = \{x_i(z)\} = \{\Delta^{j_1\ldots j_l}_{i_1\ldots i_l}(z);\ 1 \leq l < n\}$ où $\Delta^{j_1\ldots j_l}_{i_1\ldots i_l}(z)$ est le mineur de la matrice construite à partir de variables complexes $z_n = (z^j_i)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ par la sélection des lignes $j_1, j_2, \ldots, j_l$ et des colonnes $i_1, i_2, \ldots, i_l$. Les 'polynômes à bosons' sont des polynômes homogènes en $\Delta(z)$ et ne sont autres que les éléments:

$$D^{[h]}_{(m),(h)}(z_n) = D^{[h]}_{(m),(h)}(\Delta(z)). \tag{8}$$

Dans le cas où (m) est (max), l'expression (8) devient la base de Bargmann–Moshinsky (Louck 1970, Henrich 1975):

$$\Gamma_n\begin{pmatrix}[h]\\(h)\end{pmatrix}(\Delta(z)) = D^{[h]_n}_{(\max)_n,(h)_n}(z_n). \tag{9}$$

Aux éléments de la matrice de la représentation

$$D^{[h]}_{(\max),(\max)}(U_n U'_{n-1}) \qquad \text{et} \qquad D^{[h]}_{(\max)\left|\begin{smallmatrix}[h]_{n-1}\\(\max)_{n-1}\end{smallmatrix}\right|}(U_n U'_{n-1}),$$

nous faisons correspondre les deux fonctions

$$K_n\binom{[h]}{(h)}(z, z') \qquad \text{et} \qquad R\binom{[h]_n}{[h]_{n-1}}(z, z')$$

qui s'écrivent

$$K_n\binom{[h]}{(h)}(z, z') = D^{[h]}_{(\max),(\max)}(z_n, z'_n) \tag{10}$$

$$= N_n \prod_{k=1}^{n} (\Delta^{12\ldots k}_{12\ldots k}(z_n z'_n))^{h_{kn}-h_{k+1\,n}} \tag{11}$$

et

$$R_n\begin{pmatrix}[h]_n\\ [h]_{n-1}\end{pmatrix}(z, z') = D^{[h]}_{(\max)\left|\begin{smallmatrix}[h]_{n-1}\\(\max)_{n-1}\end{smallmatrix}\right|}(z_n, z'_n) \tag{12}$$

$$= N'_n \prod_{k=1}^{n-1} [\Delta^{12\ldots k}_{12\ldots k-1,k}(z_n z'_n)]^{d'_{kn}} \prod_{k=1}^{n} [\Delta^{12\ldots k}_{12\ldots k-1,n}(z_n z'_n)]^{d_{kn}}, \tag{13}$$

avec

$$z_n = (z_{ij}), \qquad z'_n = \left(\begin{array}{c|c} \overset{\overset{n-1}{\rightarrow}}{z'_{ij}} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)^{\downarrow n-1}$$

$$U_n = (U_{ij}), \qquad U'_n = \left(\begin{array}{c|c} \overset{\overset{n-1}{\rightarrow}}{U'_{ij}} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)^{\downarrow n-1}, \qquad h_{\mu n} = 0 \qquad \text{si } \mu > n$$

et

$$d_{\mu\lambda} = h_{\mu\lambda} - h_{\mu\lambda-1}, \qquad d'_{\mu\lambda} = h_{\mu\lambda-1} - h_{\mu+1\,\lambda},$$

$$N_n = \frac{\Pi_{j=1}^{n-1}\,\Pi_{k=j+1}^{n}\,(h_{jn} - h_{kn} + k - j)}{\Pi_{j=1}^{n}\,(h_{jn} + n - j)!},$$

$$N'_n = [N_{n-1}]^{1/2}\left[A\begin{pmatrix}[h]_n\\ [h]_{n-1}\end{pmatrix}\right]^{-1/2}$$

$$A\begin{pmatrix}[h]_n\\ [h]_{n-1}\end{pmatrix} = \frac{\Pi_{j=1}^{n}\,\mu_j!\,Q_{(\mu,\mu')}\tilde{Q}_{(\mu,\mu')}}{P_{(\mu)}P_{(\mu')}},$$

avec

$$\mu_j = h_{jn} + n - j, \qquad \mu'_j = h_{jn-1} + n - j - 1,$$

$$P_{(\mu)} = \prod_{j<k} (\mu_j - \mu_k)!, \qquad P_{(\mu')} = \prod_{j<k} (\mu'_j - \mu'_k)!,$$

$$Q_{(\mu,\mu')} = \prod_{j<k} (\mu'_j - \mu_k)!, \qquad \tilde{Q}_{(\mu,\mu')} = \prod_{j\le k} (\mu_j - \mu'_k + 1)!.$$

Les fonctions K_n et R_n s'expriment à l'aide des éléments de la base de Bargmann–

Moshinsky sous la forme:

$$K_n(\Delta(z), \Delta(z')) = \sum_{(h)_n} \Gamma_n \binom{[h]}{(h)} (\Delta(z))\Gamma_n \binom{[h]}{(h)} (\Delta(\bar{z}')), \tag{14}$$

$$R_n(\Delta(z), \Delta(z)) = \sum_{(h)_{n-1}} \Gamma_{n-1} \binom{[h]_{n-1}}{[h]_{n-1}} (\Delta(z))\Gamma_n \binom{[h]_n}{[h]_n} (\Delta(\bar{z}')). \tag{15}$$

Ces expressions, dérivent simplement du développement de $D^{[h]}_{(m),(h)}(U_n U'_n)$ et de $D^{[h]}_{(m),(h)}(U_n U'_n)$ en remplaçant respectivement U_n, U'_n et U'_n par z_n, z'_n, z'_n et en multipliant par des constantes de normalisation (Louck 1970). Dans les relations (11) et (13) nous pouvons écrire les expressions $\Delta^{12\ldots k}_{12\ldots k}(z_n z'_n)$ et $\Delta^{12\ldots k}_{12\ldots k-1\,n}(z_n z'_n)$ en fonction des variables $\Delta(z)$ et $\Delta(z')$ (voir Henrich 1975) et c'est pourquoi nous considérons dans la suite de ce travail K_n et R_n comme des fonctions des nouvelles variables $\Delta(z)$ et $\Delta(z')$.

Enfin, une propriété importante de K_n et R_n se déduit de (14) et (15) et s'exprime sous la forme:

$$\int R_n(\Delta(z), \Delta(z'))K_{n-1}(\Delta(z'), \Delta(\omega))\, \mathrm{d}\mu(z') = R_n(\Delta(z), \Delta(\omega)), \tag{16}$$

où $\mathrm{d}\mu(z')$ est la mesure de l'intégration dans l'espace de Bargmann et Moshinsky et $\{\Delta(\omega)\}$ des variables quelconques.

3. Fonction génératrice de la base et des éléments de la représentation des groupes unitaires

Pour construire la fonction génératrice de la base de la représentation du groupe $\mathrm{U}(n)$, nous multiplions les états $|h_{\mu\nu}\rangle$ par $n(n+1)/2$ paramètres notés $\varphi_n(h_{\mu\nu}, (y, z))$ dont les puissances dépendent de $h_{\mu\nu}$ puis nous faisons la sommation sur tous les indices. Dans ce qui suit, nous exposons la manière de choisir les puissances. Le sous-espace de la représentation irréductible $[h_{\mu n}]$ est de dimension finie, de plus, nous pouvons ordonner les vecteurs de la base $\{|h_{\mu\nu}\rangle\}$ (Louck 1970). Ainsi chaque vecteur de la base $|h_{\mu\nu}\rangle$ se déduit du vecteur $\left|\begin{matrix}[h]\\(\max)\end{matrix}\right\rangle$ ou $\left|\begin{matrix}[h]\\(\min)\end{matrix}\right\rangle$ par l'application des opérateurs d'échelle R^{μ}_{λ} ou L^{μ}_{λ} (Nagel et Moshinsky 1965) comme suit:

$$\begin{aligned} |h_{\mu\nu}\rangle &= N \prod_{\lambda=2}^{h} \prod_{\mu=1}^{\lambda-1} (L^{\mu}_{\lambda})^{d_{\mu\lambda}} \left|\begin{matrix}[h]\\(\max)\end{matrix}\right\rangle \\ &= N' \prod_{\lambda=2}^{n} \prod_{\mu=1}^{\lambda-1} (R^{\mu}_{\lambda})^{d'_{\mu\lambda}} \left|\begin{matrix}[h]\\(\max)\end{matrix}\right\rangle, \end{aligned} \tag{17}$$

où N et N' sont des constantes de normalisation.

Nous pouvons donc déterminer les vecteurs $|h_{\mu\nu}\rangle$ si nous connaissons les distances $\{d_{\mu\lambda}\}$ ou $\{d'_{\mu\lambda}\}$ du vecteur $|h_{\mu\nu}\rangle$ au vecteur $\left|\begin{matrix}[h]\\(\max)\end{matrix}\right\rangle$ ou à $\left|\begin{matrix}[h]\\(\min)\end{matrix}\right\rangle$. Ainsi si nous connaissons $\{d_{\mu\lambda}\}$, $\{d'_{\mu\lambda}\}$ et h_{nn} nous pouvons déterminer $h_{\mu\nu}$, de plus, les conditions (2) sont vérifiées. Nous pouvons donc choisir les distances $d_{\mu\lambda}$, $d'_{\mu\lambda}$ et h_{nn} comme puissances des paramètres. Nous écrivons donc:

$$\varphi_n(h_{\mu\nu},(y,z))=\prod_{\lambda=2}^{n}\prod_{\mu=1}^{\lambda-1}[(z_\lambda^\mu)^{d_{\mu\lambda}}(y_\lambda^\mu)^{d'_{\mu\lambda}}](y_n^n)^{h_{nn}}.$$

Nous en déduisons qu'à chaque variable $|x_i\rangle$ correspond un élément φ_n^i qui a les mêmes indices $h_{\mu\nu}^i$ que $|x_i\rangle$.

Les polynômes homogènes $P_{(h_{\mu\nu})}(|x\rangle)$ ayant pour fonction génératrice une exponentielle, la fonction génératrice prend la forme suivante:

$$|\varphi_n(y,z)\rangle=\sum_{h_{\mu\nu}}\varphi_n(h_{\mu\nu};(y,z))P_{(h_{\mu\nu})}(|x\rangle)=\exp\Big(\sum_i\varphi_n^i|x_i\rangle\Big).\tag{18}$$

Cette expression de la fonction génératrice de la base de Gel'fand du groupe U(n) donne, dans le cas où $n=2$, la fonction génératrice du groupe U(2) obtenue par Schwinger en 1965 et pour $n=3$ elle permet d'écrire la fonction génératrice que nous avons obtenue (voir Hage Hassan 1979). Nous obtenons d'une manière analogue, la fonction génératrice des éléments de la matrice de la représentation:

$$|\varphi_n(y,y',z,z')\rangle=\sum_{\substack{h_{\mu\nu}\\ m_{\alpha\beta}}}\varphi_n(h_{\mu\nu},(y,z))\varphi_n(m_{\alpha\beta},(y',z'))D^{[h]}_{(m),(h)}(U_n)$$

$$=\exp\Big(\sum_{ij}\varphi_n^i(y',z')M_{ij}\varphi_n^j(y,z)\Big),\tag{19}$$

avec $m_{\mu n}=h_{\mu n}\ \forall n$.

$D^{[h]}_{(m),(h)}(U_n)=ND'^{[h]}_{(m),(h)}(U_n)$ où N est une constante de normalisation (Gazeau *et al* 1978).

4. Construction de la fonction génératrice de la base de la représentation du groupe U(n) par calcul de récurrence

Nous allons construire la fonction génératrice de la base de la représentation du groupe U(n) par un calcul de récurrence, pour cela nous utilisons les expressions (10)–(15) et (16) et nous prenons pour point de départ la fonction génératrice de la base de la représentation du groupe U(2) (Schwinger 1965).

4.1. Fonction génératrice de la base de la représentation du groupe U(2)

La fonction génératrice de la représentation $\Gamma_2(^{[h]}_{(h)})(\Delta(z))$ de U(2) est donnée par:

$$\sum_{(h)}\left(\frac{(h_{12}+1)!}{(h_{12}-h_{22}+1)!}\right)^{1/2}\frac{(z_2^1)^{h_{12}-h_{11}}(y_2^1)^{h_{11}-h_{22}}(y_2^2)^{h_{22}}}{[(h_{12}-h_{11})!(h_{11}-h_{22})!h_{22}!]^{1/2}}\Gamma_2\binom{[h]}{(h)}(\Delta(z))$$

$$=\exp(\Delta_1y_2^1+\Delta_2z_2^1+\Delta_{12}y_2^2).\tag{20}$$

Nous rappelons que cette fonction s'obtient aussi en utilisant la formule (18) dans le cas où $n=2$.

4.2. Fonction génératrice de la base de la représentation du groupe U(3)

Pour déterminer la fonction génératrice de la base de la représentation de U(3), nous devons partir de l'expression:

$$\int R_n(\Delta(z), \Delta(\omega))K_{n-1}(\Delta(\omega)\Delta(z'))\,\mathrm{d}\mu(\omega) = R_n(\Delta(z), \Delta(z')). \tag{21}$$

Il est important de remarquer que nous pouvons remplacer les variables $\Delta(z')$ par d'autres variables sans que rien ne soit modifié dans l'expression de l'intégrale (21). Ainsi nous effectuons le remplacement dans

$$K_2 = N_2[\Delta_1(\bar{z}')\Delta_1(\omega) + \Delta_2(\bar{z}')\Delta_2(\omega)]^{h_{12}-h_{22}}\Delta_{12}^{h_{22}}(\bar{z}')\Delta_{12}^{h_{22}}(\omega),$$

où nous remplaçons respectivement $\Delta_1(\bar{z}')$ par y_1^1, $\Delta_2(\bar{z}')$ par z_2^1 et $\Delta_{12}(\bar{z}')$ par 1, ainsi nous obtenons:

$$\begin{aligned}K_2' &= N_2(\Delta_1 y_2^1 + \Delta_2 z_2^1)^{h_{12}-h_{22}}\Delta_{12}^{h_{22}}(\omega)\\ &= N_2(h_{12}-h_{22})!\left(\frac{(h_{12}+1)!}{(h_{12}-h_{22}+1)!}\right)^{1/2}\frac{(y_2^1)^{h_{11}-h_{22}}(z_2^1)^{h_{12}-h_{11}}}{[(h_{11}-h_{22})!(h_{12}-h_{11})!h_{22}!]^{1/2}}\Gamma_2\begin{pmatrix}[h]\\(h)\end{pmatrix}(\Delta(\omega))\\ &= A_2\Gamma_2\begin{pmatrix}[h]\\(h)\end{pmatrix}(\Delta(\omega))[(y_2^1)^{h_{11}-h_{22}}(z_2^1)^{h_{12}-h_{11}}].\end{aligned}$$

A la suite de ces remplacements et à l'aide de l'expression de l'intégrale (21), nous pouvons déterminer R_3' qui s'écrit alors:

$$R_3' = N_3'(\Delta_1 y_2^1 + \Delta_2 z_2^1)^{h_{12}-h_{23}}\Delta_3^{h_{13}-h_{12}}\Delta_{12}^{h_{22}-h_{33}}(\Delta_{13}y_2^1 + \Delta_{23}z_2^1)^{h_{23}-h_{22}}\Delta_{123}^{h_{33}}.$$

En multipliant R_3' par $A^3\,\Pi_{\mu=1}^2\,(z_3^\mu)^{d_{\mu 3}}(y_3^\mu)^{d'_{\mu 3}}$ avec

$$A^n = \left(N_n'\prod_{k=1}^n d'_{kn}!\prod_{k=1}^n d_{kn}!\right)^{-1}$$

nous trouvons:

$$\begin{aligned}K_3' &= N_3[(\Delta_1 y_2^1 + \Delta_2 z_2^1)y_3^1 + \Delta_3 z_3^1]^{h_{13}-h_{23}}[(\Delta_{13}y_2^1 + \Delta_{23}z_2^1)z_3^2 + \Delta_{12}y_3^2]^{h_{23}-h_{33}}\Delta_{\Delta_{123}}^{h_{33}}\\ &= \sum_{(h)} B_3 A_3 \prod_{\lambda=2}^3\prod_{\mu=1}^2 (z_\lambda^\mu)^{d_{\mu\lambda}}(y_\lambda^\mu)^{d'_{\mu\lambda}}\Gamma_3\begin{pmatrix}[h]\\(h)\end{pmatrix}(\Delta(z)),\end{aligned}$$

avec $A_3 = A_2 A^3$, $B_n = N_n\,\Pi_{k=1}^n\,(h_{kn} - h_{k+1n})!$.

La fonction génératrice de la base de la représentation du groupe U(3) se déduit de l'expression de K_3' en multipliant celle-ci par $B_3^{-1}(y_3^3)^{h_{33}}$ et en faisant la sommation sur $h_{\mu\nu}$. Nous obtenons:

$$\begin{aligned}&\sum_{h_{\mu\nu}} A_3\varphi_3(h_{\mu\nu}, (y, z))\Gamma_3\begin{pmatrix}[h]\\(h)\end{pmatrix}(\Delta(z))\\ &\qquad = \exp[(\Delta_1 y_2^1 + \Delta_2 z_2^1)y_3^1 + \Delta_3 z_3^1 + (\Delta_{13}y_2^1 + \Delta_{23}z_2^1)z_3^2 + \Delta_{12}y_3^2 + \Delta_{123}y_3^3]. \end{aligned}\tag{22}$$

Il est à remarquer que cette formule s'obtient en posant $n = 3$ dans l'expression (18).

4.3.

Pour déterminer la fonction génératrice de la base de la représentation de U(4) nous remplaçons dans l'expression (21), K_3 par K_3', ainsi nous obtenons R_4'. Par un calcul analogue aux calculs précédents, nous déduisons K_4' de R_4' en multipliant l'expression de R_4' par $A_4\,\Pi_{\mu=1}^3\,(z_4^\mu)^{d_{\mu 4}}(y_4^\mu)^{d'_{\mu 4}}$ et en faisant la sommation sur $h_{\mu\nu}$ avec $\nu < 4$.

La fonction génératrice de la base de la représentation du groupe U(4) s'obtient en multipliant l'expression de K'_4 par $B_4^{-1}(y_4^4)^{h_{44}}$ et en faisant la sommation sur $h_{\mu 4}$. Nous obtenons:

$$\sum_{h_{\mu\nu}} A_4\varphi_4(h_{\mu\nu},(y,z))\Gamma_4\begin{pmatrix}[h]\\(h)\end{pmatrix}(\Delta(z))$$
$$=\exp[(\Delta_1 y_2^1+\Delta_2 z_2^1)y_3^1+\Delta_3 z_3^1)y_4^1+\Delta_4 z_4^1$$
$$+((\Delta_{13}y_2^1+\Delta_{23}z_2^1)z_3^2+\Delta_{12}y_3^2)y_4^2+((\Delta_{14}y_2^1+\Delta_{24}z_2^1)z_3^1+\Delta_{34}z_3^1)z_4^2$$
$$+((\Delta_{134}y_2^1+\Delta_{234}z_2^1)z_3^2+\Delta_{124}y_3^2)z_4^3+\Delta_{123}y_4^3]. \tag{23}$$

Par la même méthode, pour $n=5, 6, \ldots$, nous obtenons la fonction génératrice de la base de la représentation de U(n), à savoir:

$$\sum_{h_{\mu\nu}} A_n\varphi_n(h_{\mu\nu},(y,z))\Gamma_n\begin{pmatrix}[h]\\(h)\end{pmatrix}(\Delta(z))=\exp\left(\sum_i \varphi'^{i}_n x_i(z_n)\right), \tag{24}$$

avec $A_n=A_{n-1}A^n$.

Nous reconnaissons dans l'expression précédente la fonction génératrice écrite en (18).

Le développement du second terme et la comparaison avec le premier permet sans difficulté de déterminer $\Gamma_n\binom{[h]}{(h)}(\Delta(z))$.

5. Conclusion

Dans ce travail, les fonctions génératrices des éléments de la matrice de la représentation et de la base de Gel'fand des groupes unitaires sont obtenues par deux méthodes différentes. La première qui ne fait intervenir pratiquement aucun calcul consiste à utiliser une propriété des fonctions génératrices que nous avons pu mettre en évidence et l'approche infinitésimale préconisée par Nagel et Moshinsky (1965) dans le calcul des vecteurs de la base de Gel'fand. La deuxième méthode dont le point de départ est la fonction génératrice du groupe SU(2), est un calcul de récurrence fondé sur la connaissance de l'état maximal et semimaximal. Cette méthode est une méthode globale qui ne fait pas intervenir les opérateurs d'échelle.

A partir des fonctions génératrices que nous avons construites, nous obtenons par des développements simples de ces fonctions, des expressions explicites des éléments de la matrice de la représentation et de la base de Gel'fand des groupes unitaires U(n). Les éléments de la matrice de la représentation des groupes U(n) présentent un intérêt considérable de par leur connaissance explicite d'une part, du fait qu'ils permettent le calcul des coefficients de couplage des groupes unitaires et la détermination des éléments de la matrice de la représentation des groupes symétriques (Louck et Biedenharn 1973), d'autre part.

A l'aide de la propriété des fonctions génératrices que nous avons pu mettre en évidence et en tenant compte des résultats obtenus par l'extension de la méthode infinitésimale préconisée par Nagel et Moshinsky (1965), dans le cas des groupes unitaires, aux groupes orthogonaux (Wong 1974, Pang et Hecht 1967) et symplectiques (Mickelson 1972) et à d'autres groupes (Patera 1973, Patera *et al* 1974), nous envisageons de construire les fonctions génératrices de la base de la représentation de ces différents groupes et d'en déduire explicitement les éléments de ces bases.

La deuxième méthode globale que nous avons établie, s'avère prometteuse dans la mesure où on peut, en vertu du théorème de Borel–Weil (1954) envisager de l'appliquer à l'étude des groupes semi-simples et obtenir les fonctions génératrices de ces groupes.

Appendice

A.1.

Les fonctions génératrices des polynômes orthogonaux (Vilenkin 1965) $P_n(x)$ s'écrivent sous la forme

$$f(x, z)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i P_i(x).$$

Le polynôme $P_i(x)$ se déduit du polynôme $P_0(x)$ par l'application de l'opérateur d'échelle K_+^i comme suit:

$$P_i(x)=(K_+^i K_+^{i-1}\ldots K_+^2 K_+)P_0(x).$$

On en déduit que la puissance du paramètre z est égale au nombre des opérateurs K_+^i.

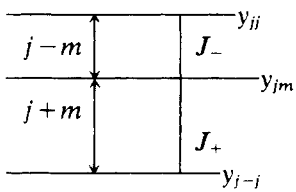
A.2.

La fonction génératrice des harmoniques sphériques (Schwinger 1965) est:

$$\exp\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{2}\right)=\sum_{jm}\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2}\frac{z_1^{j+m}z_2^{j-m}}{[(j+m)!(j-m)!]^{1/2}}\,y_{jm}(\boldsymbol{r}),$$

$$\boldsymbol{a}=(-z_1^2+z_2^2,\,-\mathrm{i}(z_1^2+z_2^2),\,2z_1z_2),\qquad \boldsymbol{r}=(x,y,z).$$

$j-m$ représente le nombre des applications de J_- pour l'obtention de y_{jm} à partir de y_{jj}. $j+m$ est le nombre des applications de J_+ pour la déduction de y_{jm} à partir de y_{j-j}.



A.3.

La fonction génératrice de la représentation couplée (Schwinger 1965) s'écrit sous la forme:

$$\sum_{jm\mu\nu}(\nu+j)!(2j+1)^{1/2}\frac{x_1^{j+m}x_2^{j-m}\xi_1^{j+\mu}\xi_2^{j-\mu}x^{\nu-j-1}}{[(j+m)!(j-m)!(j+\mu)!(j-\mu)!(\nu-j-1)!]^{1/2}}|jm\mu\nu\rangle.$$

Dans ce cas les opérateurs d'échelle sont (J_+, J_-), $(\mathcal{J}_+, \mathcal{J}_-)$ et K_+. Ici aussi nous remarquerons que les puissances des paramètres sont égales au nombre des applications de $J_+, \ldots, K_+$, nécessaire pour déduire $|jm\mu\nu\rangle$ de $|jjj0\rangle$.

Remerciements

Ayant été contraint par faits de guerre, de quitter le Liban et de refaire ce travail, je tiens à remercier pour leur accueil chaleureux lors de mon arrivée à Lyon, tous les membres de l'Institut de Physique Nucléaire et plus particulièrement le Dr M Kibler qui m'a beaucoup aidé et a mis à ma disposition toute la documentation nécessaire.

Références

Borel A et Weil A 1954 *Séminaire Bourbaki* (exposé par J P Serre)
Flores et Niederle 1970 *Czech. J. Phys.* **B2** 1241
Gazeau J P, Dumont-Lepage M Cl et Ronveaux A 1978 *J. Math. Phys.* **19** 734
Hage Hassan M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **12** 1633
—— 1980 *J. Phys. A: Math. Gen.* **13** 1903
Henrich C J 1975 *J. Math. Phys.* **16** 2271
Louck J D 1970 *J. Math. Phys.* **11** 2368
Louck J D et Biedenharn L C 1973 *J. Math. Phys.* **14** 1336
Mickelson J M 1972 *Rep. Math. Phys.* **3** 193
Nagel J G et Moshinsky M 1965 *J. Math. Phys.* **6** 682
Pang S C et Hecht K T 1967 *J. Math. Phys.* **8** 1233
Patera J 1973 *J. Math. Phys.* **14** 279
Patera J, Winternitz et Sharp R T 1974 *Rev. Mex. Fis.* **23** 81
Schwinger J 1965 in *Quantum Theory of Angular Momentum* ed L C Biedenharn et Van Dam (New York: Academic) p 229
Sharp R T et Lee D 1971 *Rev. Mex. Fis.* **20** 203
Vilenkin N J 1969 *Fonctions Spéciales et Théorie de la Représentation des Groupes* (Paris: Dunod)
Wong M K F 1974 *J. Math. Phys.* **15** 25